



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ
ETAPA NAȚIONALĂ
TIMIȘOARA, 2025

PROBA TEORETICĂ
CATEGORIILE J1 și J2

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Se punctează oricare alte formulări / modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.
- Durata probei este de 3 ore.

Subiectul I (50 puncte) – Grile

1. Răspuns corect: c) (5 puncte)

2. Răspuns corect: d) (5 puncte)

Rezolvare:

$$r_{\min} \cdot v_{\text{periheliu}} = r_{\max} \cdot v_{\text{afeliu}}; r_{\min} = a(1 - e); r_{\max} = a(1 + e); v_a = 25 \cdot \frac{1 - 0,2}{1 + 0,2} \frac{\text{km}}{\text{s}}; v_a = 16,66 \text{ km/s}$$

3. Răspuns corect: c) (5 puncte)

$$\left(D = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,379} = 2,64 \text{ pc} \cdot 3,26 \text{ al} = 8,61 \text{ al} \right)$$

4. Răspuns corect: b) (5 puncte)

Rezolvare: Luna se distanțează de Pământ cu o rată de circa $3,8 \text{ cm/an}$, datorită interacțiunii dintre forțele gravitaționale și cele mareice.

5. Rezolvare: Aplicăm formula de calcul a accelerației gravitaționale la sol:

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2} \cong 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

6. Răspuns corect: c) (5 puncte)

Rezolvare:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = 0^\circ, \delta = -\varepsilon = -23^\circ 27', \text{ deci } \varphi = 90^\circ - \varepsilon = 66^\circ 33'$$

7. Răspuns corect: a) (5 puncte)

8. Răspuns corect: b) (5 puncte)

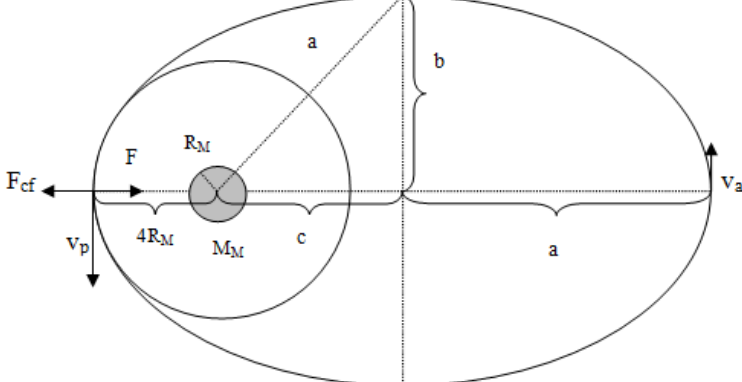
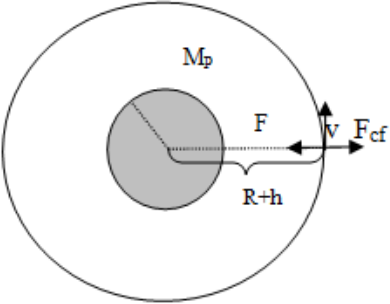
9. Răspuns corect: d) (5 puncte)

10. Răspuns corect: a) (5 puncte)

Rezolvare: $\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$, $R = 13,4 \text{ kpc} = 4,135 \cdot 10^{20} \text{ m}$, $M = \frac{Rv^2}{G} = 2,3 \cdot 10^{42} \text{ kg} = 1,15 \cdot 10^{12} M_{\odot}$

Subiectul II (50 puncte) – Probleme scurte

II.1. Planeta Marte și un satelit (20 puncte)

Nr.	Rezolvare	Punctaj
a)		1p
	$\frac{km_s M_M}{16R_M^2} = m_s \omega^2 4R_M; \omega = \frac{2\pi}{T}; T = 2\pi \sqrt{\frac{64R_M^3}{kM_M}}; T = 47980 \text{ s} \cong 13,327$	3p
	$r_{\min} v_p = r_{\max} v_a,$ $r_{\min} = a(1 - e), r_{\max} = a(1 + e),$ $v_p = 5v_a,$ $\frac{1+e}{1-e} = 5, \text{ deci } e = \frac{2}{3}$	3p
	$r_{\min} = 4R_M; 2a = r_{\min} + r_{\max}; a = 12R_M; b^2 = a^2 - (a - r_{\min})^2; b = R_M \sqrt{80}; c = 8R_M;$ $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; e = 0,66$	3p
b)		1p
	-calculăm mai întâi înălțimea satelitelui față de Pământ: $F = F_{cf}; \frac{kM_P m_s}{(R_P + h)^2} = m_s \omega^2 (R_P + h); \omega = \frac{2\pi}{T}; h = \sqrt[3]{\frac{KT^2 M_P}{4\pi^2}} - R_P;$ $h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} (24.3600)^2 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4,314^2}} - 6,4 \cdot 10^6 \cong 35600 \text{ km};$	3p



	-valoarea înălțimii calculata pentru Pamant, este utilizata pentru determinarea perioadei de rotație a planetei Marte in jurul axei. $\frac{kmM_M}{(R_M + h)^2} = m\omega_M^2 (R_M + h); T_M = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_M + h)^3 R_M}{kmM_M}};$ $T_M = 2.3,14 \sqrt{\frac{(3393 + 35600)^3 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}} = 233655s = 64,904h;$	3p
	$v = \frac{2\pi(R_M + h)}{T_M};$ $v = 1,048 \frac{km}{s}$	3p
	TOTAL	20p

II.2. „Observații astronomice în dublă stație” (10 puncte)

Rezolvare	Punctaj
a) Înălțimile globului de foc pentru cei doi sunt: $h_C = 45^\circ$ și $h_M = 60^\circ$	1p
Altitudinea fenomenului pentru cei doi este $H = R_C \sin 45^\circ = R_M \sin 60^\circ$	1p
Distanța dintre cei doi este: $d = R_C \cos 45^\circ - R_M \cos 60^\circ$	1p
Înlocuim prima ecuație în a doua obținem: $50 = 0,707 \frac{H}{0,707} - 0,5 \frac{H}{0,866}$	1p
Altitudinea $H \approx 118,2\text{km}$	1p
b) Distanțele până la „globul de foc” ale celor doi sunt $R_C = \frac{H}{\sin 45^\circ}$ și $R_M = \frac{H}{\sin 60^\circ}$	3p
$R_C \approx 167,2\text{km}$ și $R_M \approx 136,5\text{km}$	2p
Total	10p



II.3. Roiuri stelare (20 puncte)

	Notă: dacă anumiți pași intermediari triviali sunt săriți, însă raționamentul este corect, se vor acorda punctajele intermediare aferente pașilor săriți.	
a)	Pentru:	Total: 10p
	Relația lui Pogson: $\frac{F_1}{F_2} = 10^{-0,4(m_1-m_2)}$	1p
	unde $F_1 = \frac{L_1}{4\pi d_1^2}$, $F_2 = \frac{L_2}{4\pi d_2^2}$	0,5p
	Dar $M_1 = m_1 + 5 - 5\lg d_1$, $M_2 = m_2 + 5 - 5\lg d_2$	1,25p
	Deci $m_1 - m_2 = M_1 - M_2 + 5\lg d_1 - 5\lg d_2$	0,5p
	Găsim că $\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2} = 10^{-0,4(M_1-M_2)} 10^{-2(\lg d_1 - \lg d_2)}$	0,25p
	Dar $-2(\lg d_1 - \lg d_2) = \lg\left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{-2}\right)$	1p
	Ajungem la $\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2} = 10^{-0,4(M_1-M_2)} \frac{d_2^2}{d_1^2}$	0,5p
	Deci, $\frac{L_1}{L_2} = 10^{-0,4(M_1-M_2)}$	0,5p
	Pentru o singură stea: $\frac{L}{L_\odot} = 10^{-0,4(M - M_\odot)}$	1p
	Pentru tot roiul: $\frac{NL}{L_\odot} = 10^{-0,4(M_{roi} - M_\odot)}$	1,5p
	$N10^{-0,4(M - M_\odot)} = 10^{-0,4(M_{roi} - M_\odot)}$	0,25p
	$\lg(N) - 0,4(M - M_\odot) = -0,4(M_{roi} - M_\odot)$	0,5p
	$M_{roi} = M - 2,5\lg(N)$	0,25p
	$M_{roi} = m + 5 - 5\lg(d)$	0,25p
	$d = 10^{0,2(m+5-M+2,5\lg(N))}$	0,25p
	$d = 194,75 \text{ kpc}$	0,5p
b)	Pentru:	Total: 3p
	Luminozitățile unei stele și ale Soarelui sunt: $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$	1,25p



	Din punctul precedent, $\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0,4(M-M_{\odot})}$	0,25p
	Deci, $\frac{R^2 T^4}{R_{\odot}^2 T_{\odot}^4} = 10^{-0,4(M-M_{\odot})}$	0,25p
	Cum $R = R_{\odot}$, obținem că $\frac{T^4}{T_{\odot}^4} = 10^{-0,4(M-M_{\odot})}$	0,5p
	$\frac{T}{T_{\odot}} = 10^{-0,1(M-M_{\odot})}$	0,25p
	$\frac{T}{T_{\odot}} = 3,86$	0,5p
c)	Pentru:	Total: 7p
	$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq \frac{\theta(rad)}{2} = \frac{R}{d}$	2p
	$R = \frac{d\theta(rad)}{2}$	0,25p
	$\theta(rad) = \frac{\theta('')}{206265} = \frac{60 \cdot \theta(')}{206265} = 5,24 \cdot 10^{-3} rad$, deci $R = 509,85 pc$	0,5p
	$V = \frac{4\pi R^3}{3} = N V_{cub} = N l^3$	3p
	$l = R \left(\frac{4\pi}{3N}\right)^{1/3} = 10,36 pc$	0,25p
	$l(km) = l(pc) \cdot 3,086 \cdot 10^{13}$	0,5p
	$l = 3,20 \cdot 10^{14} km$	0,5p



Subiectul III (80 puncte) – Probleme lungi

III.1. Sistem stelar....triplu! (45 puncte)

	Notă: dacă anumiți pași intermediari triviali sunt săriți, însă raționamentul este corect, se vor acorda punctajele intermediare aferente pașilor săriți.	
1)	Pentru:	Total: 10p
	Din geometria problemei: $R = \frac{2}{3}h$	1p
	$h = l \cdot \sin(60^\circ) = \frac{l\sqrt{3}}{2}$	1p
	$R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$	0,5
	Echilibrul pe orbită: $F_{cf} = 2 \cdot F_g \cdot \cos(30^\circ)$	3,25p
	$F_{cf} = \frac{Mv^2}{R} = M\omega^2 R$	0,5p
	$F_g = \frac{GM^2}{l^2} = \frac{GM^2}{3R^2}$	0,5p
	$M\omega^2 R = 2 \cdot \frac{GM^2}{3R^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,25
	$\omega = \sqrt{\frac{GM\sqrt{3}}{3R^3}}$	0,25
	$P = \frac{2\pi}{\omega}$	1p
	$P = 2\pi \sqrt{\frac{3R^3}{GM\sqrt{3}}}$	0,25p
	$E = 3 \cdot \frac{Mv^2}{2} - 3 \frac{GM^2}{R}$	1p
	Înlocuind $v = \omega R$, obținem $E = \frac{3GM^2}{R} (\frac{\sqrt{3}}{6} - 1)$.	0,5p
2)	Pentru:	Total: 6p



	$m = 6 + 5lg \frac{D}{d_{ochi}}$	2p
	$\frac{D}{d_{ochi}} = 10^{0,2(m-6)}$	0,25p
	$D = 15.32 \text{ mm}$	0,5p
	Într-adevăr, orice telescop are diametrul mai mare decât D , deci poate să distingă sistemul.	0,25p
	Din definiția magnitudinii: $M = m + 5 - 5lg(d)$, deci $m = M - 5 + 5lg(d)$	0,75p
	Când sistemul este la limita vizibilității, fiind la distanța d' , $6 = M - 5 + 5lg(d')$.	0,75p
	Înlocuind, $5lg(d') = 11 - M = 6 - m + 5lg(d)$	0,25p
	$d' = 10^{0,2(6-m+5lg(d))}$	0,25p
	Dar $d = \frac{1}{p}$, de unde avem $d' = 10^{0,2(6-m-5lg(p))}$	0,75p
	Deci $d' = 69,12 \text{ pc}$	0,25p
3)	Pentru:	Total: 8p
	Fiecare stea va avea un flux $F = \frac{L}{4\pi d^2}$	1p
	Fluxul total provenit de la sistem va fi $3F$ (pentru că avem 3 stele)	2p
	Relația lui Pogson: $\frac{3F}{F_{\odot}} = 10^{-0,4(m-m_{\odot})}$	0,5p
	Dar $m_{\odot} = M_{abs} - 5 + 5lg(d_{SP}) = -26,73$ și $F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{SP}^2}$	0,5p
	Înlocuind, obținem $\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{1}{3} \frac{d^2}{d_{SP}^2} 10^{-0,4(m+5-M_{abs}-5log(d_{SP}))}$	0,5p
	Știm însă că $\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{3,5}$	1p
	Deci, $\frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{1}{3} \frac{d^2}{d_{SP}^2} 10^{-0,4(m+5-M_{abs}-5log(d_{SP}))}\right)^{1/3,5}$	1p
	Avem că $d = \frac{1}{p} \text{ (pc)} = 3,086 \cdot 10^{16} \cdot \frac{1}{p} \text{ (m)} = 5,36 \cdot 10^{18} \text{ m}$	1p
	Înlocuind totul, găsim că $\frac{M}{M_{\odot}} = 1,64$, deci $M = 3,28 \cdot 10^{20} \text{ kg}$.	0,5p
4)	Pentru:	Total:



		5p
	Distanța unghiulară maximă dintre 2 stele se găsește atunci când linia care le unește este perpendiculară pe linia de vedere	
	$\tan \frac{\Delta\varphi}{2} \simeq \frac{\Delta\varphi}{2} \simeq \frac{l}{d}$ ($\Delta\varphi$ este unghi mic)	2p
	$\Delta\varphi = \frac{l}{d} = \frac{R\sqrt{3}}{d}$	0,25p
	$R = \frac{d\Delta\varphi}{\sqrt{3}}$	0,25p
	Trebuie să convertim $\Delta\varphi$ în radiani: $\Delta\varphi (rad) = \frac{\Delta\varphi(arcsec)}{206265}$	0,5p
	$R = 6,49 \cdot 10^7 m$	0,5p
	Înlocuind în formula $P = 2\pi \sqrt{\frac{3R^3}{GM\sqrt{3}}}$, găsim	1p
	$P = 338,31$ zile	0,5p
5)	Pentru:	Total: 3p
	Criteriul lui Rayleigh: $\Delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D_{telescop}}$	2p
	$D_{telescop} = \frac{1,22 \lambda}{\Delta\varphi(rad)}$	0,5p
	$D_{telescop} = 292,61 m$	0,5p
6)	Pentru:	Total: 10p
	Calculul coborârii orizontului: $\sin(\Delta\alpha) = \frac{\sqrt{(R+H)^2 - R^2}}{R+H}$	1,5p
	$\Delta\alpha$ este un unghi mic: $\sin(\Delta\alpha) \simeq \Delta\alpha = \frac{\sqrt{H^2 + 2RH}}{R+H}$	0,25p
	Neglijând H în raport cu R ,	
	$\Delta\alpha \simeq \frac{\sqrt{2RH}}{R} = \sqrt{\frac{2H}{R}}$ (în radiani)	0,25p
	$\Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha(rad)}{\pi} \cdot 180^\circ$ (în grade) = $2^\circ 19' 14''$	0,25p
	Steaua va fi atunci “ridică” cu $\Delta\alpha + r$, ambele efecte având ca efect coborârea orizontului.	



	Condiția de circumpolaritatea la limită: $h_{\text{culminație inferioară}} = 0^\circ$	
	Acest fenomen se întâmplă când $h_{\text{real,culminație inferioară}} = h_{\text{culminație inferioară}} - \Delta\alpha - r = -\Delta\alpha - r$	1p
	$h_{\text{real,culminație inferioară}} = \phi + \delta - 90^\circ = -\Delta\alpha - r$	
	Rezultă că $\delta = 90^\circ - \phi - \Delta\alpha - r$	0,25p
	$\delta = 47^\circ 24' 39''$	0,25p
	La baza muntelui: $h_{\text{culminație superioară}} = 90^\circ + \phi - \delta$	1p
	Trebuie să aplicăm și corecția de refracție, deci $h_{\text{real,culminație superioară}} = 90^\circ + \phi - \delta - r$	0,5p
	$h_{\text{real,culminație superioară}} = 81^\circ 43' 28''$	0,25p
	Deoarece $\delta > \phi$, steaua va culmina la nord de Zenit.	0,25p
	Din triunghiul sferic: $\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$	1p
	Dar $\sin(h) = \sin(90^\circ - \phi + \delta - r) = \cos(\phi + r - \delta)$	0,25p
	Deci, $\cos H = \frac{\cos(\phi+r-\delta) - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$	0,25p
	Găsim astfel că $H = 4,16^\circ = 0h16min40s$	0,25p
	Timpul sideral este același pentru fiecare obiect ceresc $H + \alpha = H_\odot + \alpha_\odot$	0,5p
	Ascensia dreaptă a Soarelui pe 21 iunie este $\alpha_\odot = 6h$	0,25p
	$H_\odot = H + \alpha - \alpha_\odot = 22h46min 40s$	0,25p
	Fusul orar al zonei este: $1 + [\frac{L-7.5^\circ}{15^\circ}] = 3$	0,25p
	Trebuie să convertim longitudinea în ore $L(h) = \frac{L(^{\circ})}{360^\circ} 24h = 2h57min 11s$	0,25p
	Timpul legal va fi deci $t = H_\odot + 12^h + 3h - L^h + \eta$	0,75p
	Deci $t = 10h 51min 29s$	0,25p
7)	Pentru:	Total: 3p
	Pentru un corp aflat pe suprafața găurii negre, $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Gm \cdot 3M}{R} = 0$, unde $v = c$.	2p
	Obținem $c^2 = \frac{2G \cdot 3M}{R}$	0,25p



	Deci, $R = \frac{6GM}{c^2}$	0,25p
	$R = 1,46 \cdot 10^{-6}m$	0,5p
		Total:
		45p



III.2. Sondă Spațială Barem – Analiza de date (35p)

- a) **(12 p)** Diferența dintre magnitudinea aparentă m măsurată de la distanța d și magnitudinea absolută M_V a unei stele se scrie ca:

$$m - M_V = -2,5 \times \log \left(\frac{L}{4\pi d^2} \times \frac{4\pi (10pc)^2}{L} \right)$$

$$m - M_V = -2,5 \times \log \left(\frac{L}{4\pi d^2} \times \frac{4\pi (10pc)^2}{L} \right)$$

$$m - M_V = -5 \times \log \left(\frac{10}{d} \right) \quad (1p)$$

De aici, distanța calculată din diferența de magnitudini este:

$$d = 10 \times 10^{\frac{m-M_V}{5}} \text{ în parseci.} \quad (1p)$$

Calculând valoarea pentru primul unghi, obținem

$$d = 0,00044096 \text{ pc} \quad (1 p)$$

Se observă că parsecii nu sunt cea mai potrivită unitate pentru a reda valorile pentru distanță (am avea nevoie de puteri negative pentru 10). Se transformă valoarea în unități astronomice:

$$d = 0,00044096 \text{ pc} = 206265 \times 0,00044096 \text{ UA}$$

$$d = 90,95 \text{ UA} \quad (3p) \text{ - alegerea UA ca unitate}$$

Valorile numerice în unități astronomice calculate pentru fiecare unghi sunt trecute în coloana 3 din tabel.

18 distanțe, 0,33puncte fiecare (6 p)

- b) **(15 puncte)** Vezi grafic.

Punctaj defalcăt:

- Marcarea clară a unghiurilor pe grafic (1 p)

- Marcarea clară a distanței radiale de la centru spre exterior, fie prin scrierea valorilor numerice pe cercuri ca în barem, fie prin notarea valorii unei diviziuni undeva în rezolvare

(0.5p) puncte

- Alegerea scalei potrivite pentru realizarea desenului (0.5 p)

- 18 puncte plasate corespunzător pe grafic, 0.66 puncte fiecare (12 p)

- Linia trasată bine printre puncte (se acceptă mici deviații) (1 p)

- c) **(1 p)** Orbita descrisă de stație este o elipsă, cu steaua în focar și centrul în centrul axelor hârtiei polare. (1 p)

- d) **(7 p)** De pe desen se observă ca distanța maximă față de stea se atinge la unghiul de 40° , iar distanța minimă la unghiul de 220° , cu toate celelalte valori simetrice față de această dreaptă. Aceasta este direcția semiaxei mari. Centrul elipsei va fi la jumătatea axei majore, împărțind segmentul în cele doua semiaxe mari. Axa minoră va fi perpendiculară pe cea majoră, trecând prin centrul elipsei. Vezi grafic pentru desen.

Punctaj defalcăt:

- Determinarea corectă a direcției semiaxei mari și marcarea pe desen (1.5p)
- Determinarea corectă a direcției semiaxei mici și marcarea pe desen (1p)



- Marcarea lui C pe desen

(0.5p)

Suma dintre distanța minimă și distanța maximă se poate scrie ca:

$$d_{min} + d_{max} = 2a = 114,03 + 36,01$$

Unghi	Magnitudine aparentă	Distanță (UA)
0°	-10,578	90,95
20°	-10,225	107,01
40°	-10,087	114,03
60°	-10,225	107,01
80°	-10,578	90,95
100°	-11,027	73,96
120°	-11,476	60,15
140°	-11,869	50,19
160°	-12,183	43,43
180°	-12,409	39,14
200°	-12,545	36,76
220°	-12,590	36,01
240°	-12,545	36,76
260°	-12,409	39,14
280°	-12,183	43,43
300°	-11,869	50,19
320°	-11,476	60,15
340°	-11,027	73,96

$$a = \frac{114,03+36,01}{2} = \frac{150,04}{2} = 75,02 \text{ UA}$$

(1.5p)

Distanța minimă se poate scrie ca:

$$d_{min} = a(1 - e)$$

$$(1 - e) = \frac{d_{min}}{a}$$

$$e = 1 - \frac{d_{min}}{a} = 1 - 0,48 = 0,52$$

(1.5p) puncte

Semiaxa mică se poate atunci calcula:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$b = 75,02 \times \sqrt{1 - 0,52^2} = 64,08 \text{ UA}$$

(1p)

Se punctează maxim și alte metode de determinare a valorilor, cât timp se obțin rezultate numerice corecte (măsurarea direct pe desen a semiaxei mici și calcularea excentricității din a și b, de exemplu).

